

## АҢДАТПА

### «Инверсияланған минималды беттердің солитонды деформациясы»

тақырыбы бойынша Құрманбай Дамир Мұратбекұлының

**6D060100-Математика** мамандығы бойынша PhD философия докторы

дәрежесін алуға ұсынылған диссертациялық жұмыс

**Зерттеу тақырыбының өзектілігі.** Солитондар теориясы Гарднер, Грин, Крускал және Миурдің Кортевег-де Фриз теңдеулері үшін шағылудың кері түрлендіруіне байланысты жаңалықтарының арқасында дамыған. Олардың осындай нәтижелерге жетуіне бұдан бұрын бірөлшемді торлар үшін Ферма-Паста-Улам проблемасын зерттеген Крускал және Забускидің солитондарды ашқан жаңалықтары себеп болды. Осылай солитондар теориясының заманауи дамуы басталып кетті. Бірақ осы жаңалықтың ең алғашқы тарихи нүктесі – 131 жыл бұрын басталған.

1834 жылы теңіз инженері Джон Скотт Рассел Эдинбургдің маңайында Юнион каналына бағытталып ат үстінде кетіп бара жатты. Сол сәтте не көргенін [Russell J. Scott, Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science. Report on waves.- 1844 - London] жұмысында келесідей баяндап береді:

«Мен екі аттың жіңішке каналмен сүйреген қайықтың қозғалысын байқадым, кенеттен қайық тоқтаған кезде – қайықты қозғалысқа келтірген каналдағы су қатты тербеліс күйінде қайықтың бас тұсына жиналды, содан кейін ол қайықты артта қалдырып, жоғарғы жылдамдықпен, үлкен ажыратылған дөң, дөңгеленген, тегіс және ашық бейнеде судың формасында каналдың бойымен өз бағытында формасы не жылдамдығын азайтпастан айқын түрде алға жылжи берді. Мен ат үстінде, оның алғашқы ұзындығы 9 метрдей формасын сақтап, 30–45 см биіктікте, мөлшермен 14 км/сағ жылдамдықпен сырғығанын артынан жүріп, қуып жеттім. Содан оның биіктігі біртіндеп азая берді, 2-3 км соңынан жүргенімде каналдың ішінде жоғалтып алдым. Осылай 1834 жылы бірінші рет ерекше және әдемі құбылысты көрдім және оны мен жылжыту (трансляция) толқыны деп атадым».

Модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуін (мВН, модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеуінің екі өлшемділігі) Богданов Л.В. 1987 жылы [Veselov-Novikov equation as a natural two-dimensional generalization of the Korteweg-de Vries equation, Theor. Math. Phys.] жұмысында енгізген, ал солитонды мВН деформациялар [Konopelchenko B.G., Stud. Appl. Math., 1996], [Taimanov I.A., Amer. Math. Soc. Transl., Ser., 1997] жұмыстарында енгізілген. Модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуін шығару алгоритмі [DeLong Yu, Q.P. Liu, Shikun Wang, Darboux transformation for the modified Veselov-Novikov equation, J. of Physics, 2001] жұмысында

келтірілген және Мутар түрлендіруі деп аталатын осы алгоритмнің геометриялық мағынасы [Taimanov I.A., The Moutard Transformation of Two-Dimensional Dirac Operators and Moëbius Geometry, Math. Notes, 2015 ] жұмысында алынған.

Аталған түрлендіру

$$\mathcal{D}\psi = 0$$

Дирак теңдеуі шешімімен және үш нақты тұрақтылармен беріледі, мұндағы

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} U & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial \bar{z}} & V \end{pmatrix} - U, V \text{ потенциалдарымен белгілі Дирак операторы. Ал Дирак}$$

теңдеуінің кез келген шешімі Вейерштрасс формулалары арқылы жылжытуға дейін дәлдікпен берілген, үшөлшемді евклидтік кеңістікте бетті анықтайды. Осы бетте конформды параметр беріледі және Дирак операторының  $U$  потенциалы сол бетті сипаттайтын потенциал болып табылады. Осы бетке центрі координата басында болатын инверсияны қолданып, тура сол конформды параметрі берілген және жаңа потенциал сипаттайтын жаңа бетті аламыз. Яғни, диссертациялық жұмыста минималды бетті инверсиялап, нәтижесінде инверсияланған минималды бет үшін солитонды деформацияны аламыз. Солитонды деформация осы бетті сипаттайтын Мутар түрлендіруі көмегімен табылған потенциал арқылы анықталады.

2014 жылы бастапқы Эннепер бетін қатаң жылжыту көмегімен мВН теңдеуінің бұзылушы шешімдері [Taimanov I.A., Blowing up solutions of the modified Novikov-Veselov equation and minimal surfaces, Math. Notes, 2015] алынған болатын. Ары қарай екінші ретті Эннепер беті үшін нәтижелер [Курманбаев Д.М., Вестник КазНУ(сер. мат., мех., инф.). - 2015 - т. 84 - №1 - 77-86], [Курманбаев Д.М., Солитонная деформация поверхности Эннепера второго порядка, Конференция "Геометрия многообразий". - Россия, Республика Бурятия г. Улан-Удэ, 27-30 июня 2016.- С. 26-29] жұмыстарында алынған. Ал [Курманбаев Д.М., Разрушающие решения модифицированного уравнения Веселова Новикова и поверхность Эннепера третьего порядка, Международная научная конференция «Теория функций, информатика, дифференциальные уравнения и их приложения». // Тезисы докладов посвященная 80-летию академика НАН РК Н.К.Блиева. - Алматы, Казахстан, 15 -16 октября 2015. - С. 159-161] үшінші ретті Эннепер беті үшін мВН теңдеуінің бұзылушы шешімдері және [Курманбаев Д.М., Известия НАН РК, Серия физико-математическая, т. 3, № 307 (2016), 163 – 167] регулярлы шешімдері табылды. Бірақ кез келген облыста жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформация әлі де белгісіз. Дегенмен, [Kurmanbayev D., International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. - 2020. - ID 9740638. - Volume 2020. - P. 1-7], [Курманбаев Д.М., Преобразование Мутара и поверхность Эннепера высшего порядка. // Международная научная конференция «Актуальные проблемы математики и информатики»,

посвященная 80-летию со дня рождения академика НАН РК Касымова К.К. - Алматы, Казахстан, 21 -23 декабря 2015. - С. 81-83] жұмыстарында бастапқы жоғарғы ретті Эннепер беттерін параллель тегіс көшіру арқылы қандайда шектелген облыста солитонды деформация табылған. Сонымен қатар, диссертациялық жұмыста екінші координаталық осьтің бойымен тегіс жылжыту арқылы инверсияланған катеноид [Kurmanbayev D., Yesmakhanova K., Soliton deformation of inverted catenoid. // News of the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan, vol. 2, №336. - 2021. - P. 24-32. - DOI:10.32014/2021.2518-1726.17.] және геликоид үшін солитонды деформациялар табылды.

Математикалық физика және дифференциалдық геометрия, спектралды теория және комплекс анализде интегралданатын жүйелерді зерттеу кезінде Мутар түрлендірулері ауқымды талданған. Сондықтан қазіргі кезде солитондар теориясында пайда болған есептер, тіпті геометриялық мағынасы бар есептер өзекті мәселе болып табылады.

**Диссертациялық жұмыстың мақсаты** – модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуінің шешімдерін тауып, үшөлшемді кеңістікте инверсияланған минималды беттер үшін солитонды деформацияны құрастыру.

**Осы мақсатқа сәйкес зерттеу міндеттері:**

- модификацияланған Веселов-Новиков теңдеулеріне Мутар түрлендіруін қолданып, мВН теңдеуінің нақты шешімдерін табу;
- бастапқы минималды беттерді (катеноид, геликоид, жоғарғы ретті Эннепер беттерін) қандайда координаталық осьтің (түзудің) бойымен тегіс жылжыту-бекіту және қатаң жылжыту-бекіту деформациялары арқылы мВН теңдеулерінің регулярлы және бұзылушы шешімдерін құрастыру;
- инверсияланған минималды беттерді сипаттайтын регулярлы және бұзылушы потенциалдардың кескіндерін салыстыру;
- мВН теңдеулерінің аналитикалық шешімдеріне талдау жасап, инверсияланған минималды беттер үшін солитонды деформацияны дифференциалдық геометрия және солитондар теориясында белгілі әдістермен байланыстыру;
- инверсияланған минималды беттер үшін солитонды деформацияның қолданылуларын көрсету.

**Зерттеу объектісі** - бастапқы минималды беттер.

**Зерттеу пәні** - дифференциалдық геометрия, солитондар теориясы.

**Зерттеу әдістері.** Диссертациялық жұмыста модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуін шығару үшін Мутар түрлендіруі қолданылады. мВН теңдеулерінің шешімдері көлемді болғандықтан, аталған теңдеу шешімдері Maple бағдарламалық пакет арқылы оңай тексеріледі. Сонымен қатар, бұл шешімдер солитонды мВН деформацияларды құрастыруға мүмкіндік береді. Инверсияланған минималды беттер үшін солитонды деформацияны зерттеу үшін дифференциалдық геометриядан белгілі әдістер ұсынылады.

**Ғылыми жаңалығы.** Диссертациялық жұмыста келесі минималды

беттерінің инверсиясы арқылы солитонды мВН деформациялар құрастырылған: катеноид, геликоид және жоғарғы ретті Эннепер беттері. Диссертациялық жұмыста келесі жаңа нәтижелер алынды:

- мВН теңдеуінің шешімдері жоғарғы ретті Эннепер беттері мысалдарын келтіру арқылы табылған;
- модификацияланған Кортевег-де-Фриз (мКдФ) теңдеуінің шешімі катеноид мысалын келтіру арқылы табылған;
- мВН теңдеуінің шешімдері геликоид мысалын келтіру арқылы табылған;
- инверсияланған минималды беттер үшін солитонды деформация құрастырылған.

**Теориялық және практикалық маңыздылығы.** Диссертациялық жұмыс теориялық және практикалық есептерден тұрады. Алынған нәтижелерді заманауи геометриялық құрылымдарда және солитондар теориясында қолдануға да болады. Диссертациялық жұмыста келтірілген зерттеу әдістері қосымша теориялық физикада әртүрлі есептерді шығару барысында қолданылады.

**Қорғауға ұсынылатын ғылыми ережелер:**

- инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформацияны құрастыру;
- инверсияланған катеноид үшін солитонды деформация құрастыру арқылы модификацияланған Кортевег-де-Фриз (мКдФ) теңдеуінің шешімін табу;
- инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттерін сипаттайтын регулярлы және бұзылушы потенциалдардың кескіндерін салыстырып, осы беттер үшін солитонды деформацияның қолданылуларын көрсету.

**Жұмыстың апробациясы.** Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері келесі халықаралық ғылыми конференцияларда баяндалды және талқыланды:

- ҚР ҰҒА академигі Н.К.Блиевдің 80-жылдығына арналған «Функциялар теориясы, информатика, дифференциалдық теңдеулер және олардың қолданылулары» Халықаралық ғылыми конференциясында 15-16 қазан 2015 ж., Алматы, Қазақстан;
- ҚР ҰҒА академигі К.К.Қасымовтың 80-жылдығына арналған «Математика және информатиканың өзекті мәселелері» Халықаралық ғылыми конференциясында 21-23 желтоқсан 2015 ж., Алматы, Қазақстан;
- Third International Conference on Analysis and Applied Mathematics, ICAAM 2016, September 7-10, Almaty, Kazakhstan;
- «Көпбейнелер геометриясы» Халықаралық ғылыми конференциясында, 27-30 маусым 2016 ж., Улан Удэ қ., Бурятия Республикасы, Ресей;
- «Көпбейнелер геометриясы және олардың қолданылулары» VI Халықаралық ғылыми конференциясында, 8-10 шілде 2020 ж., Улан-Удэ қ. – Байкал к., Ресей; және
- ҚР ҰҒА академигі Т.Ш. Кальменов, ҚР ҰҒА корреспондент-мүшесі., ф.-м. ғ. д., профессор М. А. Садыбеков, ф.-м. ғ. д., профессор Б. Е. Кангужин жетекшілігімен, әл-Фараби атындағы ҚазҰУ механика-математика

факультетінің «Дифференциалдық операторлар және олардың қолданылулары» қалалық ғылыми-зерттеу семинарында талқыланып, оң баға берілді.

### **Жарияланымдар.**

Автордың диссертация тақырыбы бойынша нәтижелері 9 жұмыста жарияланды, оның ішінде 3 мақала – ҚР БҒМ Білім және ғылым саласындағы бақылау комитеті ұсынған тізімдегі журналда; 1 мақала – нөлдік емес импакт-факторы бар Scopus дерекқорына кіретін журналда; 1 мақала - РИНЦ базасымен индекстелген рецензияланған VI халықаралық ғылыми конференциясы материалдары; 4 тезис - халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында.

### **Диссертация құрылымы және көлемі.**

Диссертациялық жұмыс негізгі беттен, мазмұннан, белгілеулер мен қысқартулар тізімінен, кіріспеден, үш тарау және оның бөліктерінен, қорытындыдан және әдебиеттер тізімінен тұрады. Қолданылған әдебиеттер тізімі – 51. Диссертация көлемі – 84 бет.

**Жұмыстың негізгі мазмұны.** Диссертациялық жұмыстың әрбір тарауы жеке бөліктерден тұрады.

**Кіріспеде** зерттеу мәселесінің қазіргі жағдайы талданады және әдебиеттерге шолу жасалады, диссертациялық жұмыстың өзектілігі негізделген, жұмыстың мақсаты қойылды, зерттеу міндеттері, нысаны, пәні айқындалды және зерттеу нәтижелерінде диссертациялық жұмыстың ғылыми жаңалығы, теориялық және практикалық маңыздылығы көрсетілді.

**Бірінші** тарауда дифференциалдық геометрияның негізгі ұғымдары қазіргі өзекті тақырыптарға сәйкес бірнеше әдебиеттер арқылы енгізілген және белгілі ғылыми нәтижелер қолданылған.

**Екінші** тарауда модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуін шығару үшін белгілі Мутар түрлендіруі (Darboux transformation) келтірілген. Инверсияланған минималды беттер үшін солитонды деформацияларды сипаттау үшін мВН теңдеулерінің тривиалды емес шешімдері табылған. Атап айтқанда, [Taimanov I.A., Blowing up solutions of the modified Novikov-Veselov equation and minimal surfaces, Math. Notes, 2015] жұмысында есеп ретінде қойылған инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформациялары табылған және инверсияланған катеноид, инверсияланған геликоид үшін солитонды деформациялар зерттелген.

**Үшінші** тарауда модификацияланған Веселов-Новиков теңдеулерінің шешімдері Maple бағдарламалық пакет көмегімен тексерілді және жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитонды деформациялардың кескіндері алынды және осы беттерді сипаттайтын регулярлы және бұзылушы потенциалдардың қозғалыс динамикасы салыстырылды. Инверсияланған жоғарғы ретті Эннепер беттері үшін солитондық деформацияның қолданылулары көрсетілді.

**Қорытынды ретінде**, жұмыста алынған диссертациялық зерттеудің негізгі нәтижелері мен тұжырымдары келтірілген.